

1 Introduzione alla dinamica dei telai

1.1 Rigidezza di un telaio elementare

Il telaio della figura 1.1 ha un piano solo e i telai che hanno un piano solo, sono chiamati, in questo testo, **telai elementari**. I pilastri del telaio hanno un'altezza di 3,3 m e le campate hanno una luce di 4,2 m. I pilastri e la travata hanno sezioni quadrate di lato 30 cm.

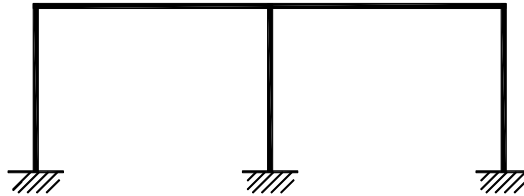


Figura 1.1 Telaio elementare.

La figura 1.2 mostra la configurazione deformata del telaio provocata da una forza orizzontale F . La forza F è applicata alla travata e la travata subisce uno spostamento orizzontale x . Il disegno è schematico e lo spostamento x è, in realtà, molto piccolo. La struttura è per ipotesi in campo elastico. Lo spostamento x è proporzionale all'intensità della forza F e, se F raddoppia, raddoppia anche lo spostamento x . La proporzionalità tra la forza F e lo spostamento x è sancita dalla relazione:

$$F = k x \quad \text{ovvero:} \quad x = F / k$$

Il termine K è un coefficiente di proporzionalità e si chiama *coefficiente di rigidezza* del telaio o, semplicemente, **rigidezza del telaio**. La rigidezza del nostro telaio vale: $k = 140 \text{ kN/cm}$. Questo parametro ci dice che una forza orizzontale F di 140 kN imprime lo spostamento x di 1 cm e, per ottenere lo spostamento di 1 cm, bisogna applicare una forza F di 140 kN.

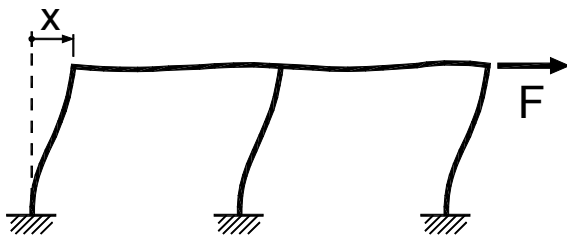


Figura 1.2 Spostamento orizzontale della travata.

Il valore della rigidità k è stato calcolato nel file intitolato **Rigidezza**. La preparazione del file **Rigidezza** è descritta, in ogni dettaglio, nel quinto capitolo e il Lettore potrà preparare questo foglio, successivamente. Per adesso è sufficiente sapere che il foglio elettronico calcola la configurazione deformata del telaio. Le aste del telaio sono divise in 10 parti uguali e il foglio calcola gli spostamenti di 10 punti dell'asse geometrico di ogni asta. La figura 1.3 mostra, per esempio, la configurazione deformata del 3° pilastro. La deformata del pilastro è costituita da una *spezzata* e gli spostamenti orizzontali dei segmenti della spezzata, sono calcolati in mm.

I valori di questi spostamenti sono contenuti in apposite celle e lo spostamento del punto più alto del 3° pilastro vale 10 (mm) e cioè 1 cm. È questo lo spostamento x della travata del telaio. Il file **Rigidezza** è di sola lettura e la cella dello spostamento x è l'unica cella modificabile del foglio. La forza F che provoca lo spostamento x viene calcolata nella cella di Excel preceduta dalla dicitura $F =$. Se digitiamo il numero 20 (e cioè 20 mm, ovvero 2 cm) nella cella dello spostamento x , viene calcolata la nuova deformata e la forza F passa da 140 a 280 kN. Lo spostamento x è raddoppiato e la forza F risulta raddoppiata.

La situazione statica del telaio è regolata dall'equazione $F = kx$ e, portando kx al 1° membro, risulta:

$$F - kx = 0$$

Questa relazione è l'*equazione d'equilibrio orizzontale* della trave: la somma delle forze orizzontali che agiscono sulla trave è nulla e la trave rimane in equilibrio. F è la forza esterna e l'espressione $-kx$ è la *forza elastica di richiamo*, che la travata riceve dai pilastri deformati: figura 1.4.

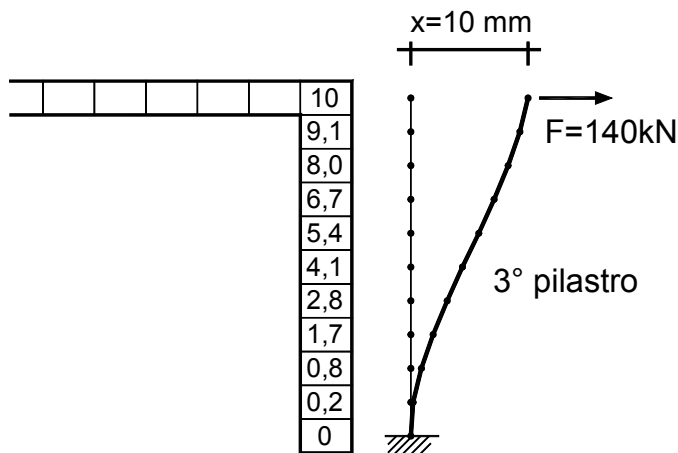


Figura 1.3 Spostamenti orizzontali del 3° pilastro (in mm).

Il pilastro generico esercita una forza di richiamo sulla trave e questa forza è lo sforzo di taglio del pilastro. Excel calcola i tagli di ogni pilastro e li somma. La risultante dei tagli dei pilastri è indicata nella figura 1.4 come ΣT e ΣT è la forza di richiamo $-kx$. La trave rimane in equilibrio perchè è *trascinata* verso destra dalla forza esterna F ed è *richiamata*, verso sinistra, dalla forza $-kx$. Se x raddoppia, raddoppia la forza di richiamo $-kx$ e raddoppia il valore della forza F .

La forza di richiamo $-kx$ mantiene sempre questa espressione. Se la forza esterna F è negativa, il telaio si sposta verso sinistra e lo spostamento x della travata diventa negativo. La forza di richiamo è rivolta, in questo caso, verso destra: l'espressione $-kx$ diventa, infatti, positiva, se $x < 0$. La forza di richiamo cerca sempre di riportare la trave alla posizione di riposo $x = 0$ e mantiene sempre la stessa espressione: $-kx$.

Il coefficiente k quantifica la rigidità del telaio. Se i pilastri del telaio avessero una sezione 25×25 , il telaio risulterebbe meno rigido e utilizzando Excel troveremmo: $k = 80 \text{ kN/cm}$. La rigidità del telaio è minore di quella precedente: occorre una forza di 80 kN , per ottenere lo spostamento x di 1 cm . Il telaio è più flessibile del telaio precedente e oppone meno resistenza agli spostamenti orizzontali.

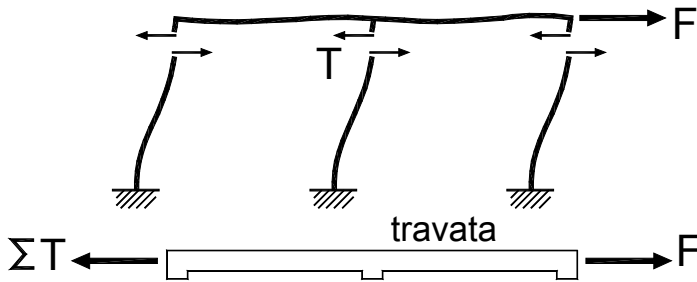


Figura 1.4 Forze orizzontali che agiscono sulla travata.

1.2 Periodo di vibrazione di un telaio

Consideriamo, ancora, il telaio di figura 1.2 e supponiamo di applicare alla travata una forza orizzontale F di 140 kN. La trave manifesta lo spostamento orizzontale x di 1cm. Sulla travata grava, per ipotesi, una massa m di 30 tonnellate. La massa m comprende le masse di tutti i pesi che gravano sulla travata: comprende le masse strutturali e non strutturali, le masse dei carichi variabili e quant'altro e la chiamiamo, brevemente: **massa della travata**. Immaginiamo, adesso, di annullare la forza F e di annullarla in modo istantaneo: figura 1.5. La trave si mette in movimento e inizia una serie di oscillazioni orizzontali intorno alla posizione di riposo $x = 0$. Le oscillazioni sono molto rapide e immaginiamo di poterle rivedere "al rallentatore". La trave parte da ferma e si mette in movimento (con tutta la sua massa di 30 tonnellate). La trave è richiamata verso la posizione di riposo dai pilastri deformati. I pilastri si comportano come delle molle, che "vogliono" tornare alla posizione di riposo. La forza F "è sparita" ed è rimasta solamente la forza di richiamo $-kx$. La forza di richiamo è massima all'istante iniziale e diminuisce, negli istanti successivi: diminuisce, infatti, lo spostamento x . La trave acquista *energia cinetica* e questa energia proviene dalla trasformazione dell'*energia elastica potenziale*, che la struttura possiede all'istante iniziale.

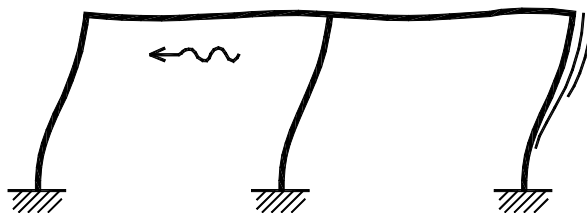


Figura 1.5 Il telaio è abbandonato alle sue oscillazioni.

La trave transita nella posizione di riposo con la massima energia cinetica e la massima velocità. La forza di richiamo si annulla per un istante, quando $x = 0$, ma la trave prosegue, per inerzia, come un “ariete” lanciato. I pilastri cominciano a frenare, a questo punto, il moto della trave: la trave si muove, adesso, in direzione negativa e i pilastri spingono la trave in direzione positiva. La velocità della travata diminuisce e l’energia cinetica del telaio si trasforma progressivamente in energia potenziale. I pilastri accumulano energia elastica e la trasformazione energetica finisce quando tutta l’energia cinetica è trasformata in energia potenziale. Queste trasformazioni sono accompagnate da piccole dissipazioni d’energia. L’energia dissipata in questa prima parte del movimento è minore del 5% dell’energia iniziale e la trave raggiunge uno spostamento compreso tra $x = -1$ cm e $x = -0,95$ cm: la trave raggiunge una condizione energetica molto prossima a quella iniziale e proseguiamo il discorso, considerando $x = -1$ cm. La trave si ritrova nelle condizioni energetiche iniziali e riparte in verso opposto, ripetendo le trasformazioni (energetiche) precedenti. Le oscillazioni si ripetono, dunque, in modo regolare e *periodico*. La trave oscilla “avanti e indietro” e la durata di una oscillazione (completa) si chiama **periodo di vibrazione naturale del telaio**. Il periodo è indicato con la lettera T e lo calcoliamo, col 2° principio della dinamica: $F = ma$.

All’istante iniziale, la trave del telaio è sollecitata dalla forza $-kx$. Questa forza imprime alla travata un’accelerazione a . L’accelerazione a è la derivata seconda dello spostamento x rispetto al tempo e la indichiamo con la classica notazione \ddot{x} . La relazione $F = ma$ diventa:

$$-kx = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + (k/m)x = 0 \quad (1.1)$$

L'equazione (1.1) vale anche negli istanti successivi. La forza di richiamo mantiene l'espressione $-kx$ ed è l'unica forza che sollecita la trave. Il moto della trave è governato da un'equazione differenziale e, per risolverla, utilizziamo la figura 1.6. La figura considera un punto materiale P, che si muove di moto circolare uniforme. Il punto parte dalla posizione P_0 e si muove a velocità costante. Il raggio OP descrive l'angolo α , nel tempo t e il rapporto α/t è la *velocità angolare* ω del moto circolare: $\omega = \alpha/t$. La velocità angolare si misura in rad/s e si chiama **pulsazione**.

Se P impiega, per esempio, un secondo a compiere un giro completo, la sua velocità angolare vale: $\omega = \alpha/t = 2\pi(\text{rad}) / 1\text{s} = 6,28 \text{ rad/s}$.

Consideriamo, adesso, il punto P' e cioè la proiezione di P sull'asse x. Il punto P e il punto P' partono insieme da P_0 e ripassano, periodicamente, in P_0 . Il punto P continua a girare lungo la circonferenza e il punto P' si muove, nel frattempo, "avanti e indietro", intorno ad O. Il movimento di P' è, per definizione, un **moto armonico**. L'ascissa del punto P' vale: $x = OP' = R \cdot \cos\alpha = R \cdot \cos(\omega t)$ essendo $\alpha = \omega t$ e l'equazione oraria di un moto armonico è:

$$x = R \cos(\omega t) \quad (1.2)$$

Derivando questa espressione rispetto al tempo, risulta:

$$\dot{x} = R (-\text{sen}(\omega t)) \cdot \omega = -\omega R \text{sen}(\omega t)$$

\dot{x} è, infatti, la derivata di un prodotto, che ha come 1° fattore il raggio R, e come 2° fattore il termine $\cos(\omega t)$. R è una costante e la sua derivata è nulla. La derivata è uguale al prodotto del fattore R per la derivata di $\cos(\omega t)$. Questa derivata vale $-\text{sen}(\omega t)$ e la derivata della *funzione interna* ωt rispetto a t, vale ω .

Deriviamo, adesso, per la seconda volta. L'operazione è analoga e la derivata di $\text{sen}(\omega t)$ è $\cos(\omega t)$. Risulta:

$$\ddot{x} = -\omega R (\cos(\omega t)) \omega = -\omega^2 R \cos(\omega t) = -\omega^2 x$$

L'equazione differenziale di un moto armonico è

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.3)$$

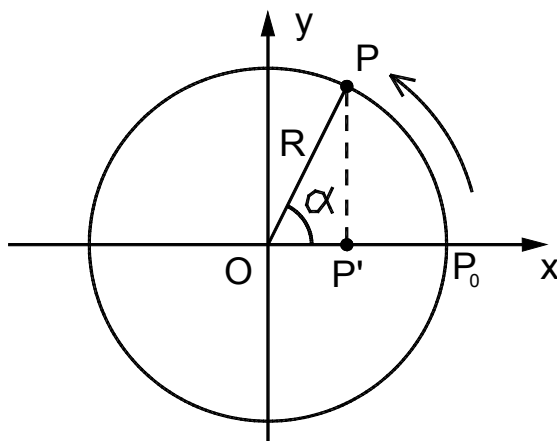


Figura 1.6 Moto circolare uniforme di un punto materiale P.

L'equazione (1.3) ha la stessa forma dell'equazione (1.1) e le due equazioni coincidono, ponendo:

$$\omega^2 = k/m \quad (1.4)$$

La travata del telaio si muove, dunque, di moto armonico; la trave oscilla "avanti e indietro" intorno alla posizione di riposo e la pulsazione di questo moto si ricava dalla relazione $\omega^2 = k/m$. Risulta:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{140 \text{ kN/cm}}{30 \text{ t}} = \frac{140 \cdot 10^3 (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2) / \text{cm}}{30 \cdot 10^3 \text{ kg}} = 467 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}$$

Abbiamo inserito i radianti, perché lo richiede il significato fisico della formula e l'aggiunta dei radianti non modifica le dimensioni fisiche. Estrahendo la radice quadrata, risulta: $\omega = 21,6 \text{ rad/s}$. La pulsazione ω permette di calcolare il periodo T.

Per ottenere questo risultato, sfruttiamo ancora la figura 1.5. Il punto P si muove a velocità costante e il tempo impiegato a compiere un giro completo vale:

$$t = \alpha/\omega = 2\pi/\omega \quad (\text{essendo } \omega = \alpha/t)$$

Durante questo periodo, il punto P' esegue il suo tragitto di andata e ritorno. Il tempo $t = 2\pi/\omega$ è, dunque, il periodo di un moto armonico e possiamo applicare la formula al nostro telaio.

Il **periodo** di vibrazione naturale di un telaio elementare vale:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad (1.5)$$

Questa formula è importantissima e conviene memorizzarla.

Il periodo di vibrazione naturale del nostro telaio vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{21,6 \text{ rad/s}} \cong 0,3 \text{ secondi}$$

Il telaio impiega tre decimi di secondo a compiere un'oscillazione completa (di andata e ritorno). L'oscillazione si ripete periodicamente e avvengono (circa) tre oscillazioni (complete) al secondo. Il risultato si commenta da solo e ognuno può farsi un'idea personale di questa vibrazione.

Il numeratore della formula $T = 2\pi/\omega$ è un numero e per trovare il periodo dobbiamo calcolare ω ; ω è la *pulsazione* del moto vibratorio del telaio e questa frase merita un ampio commento. La pulsazione ω è stata introdotta come velocità angolare del moto *circolare* del punto P, ma la parola "*pulsazione*" diventa quanto mai espressiva, se viene associata al moto *armonico* del punto P'. Il moto armonico del punto P' è, a pieno titolo, un moto "*PULSANTE*": il punto P' va continuamente "avanti e indietro" e se questo moto è rapido, diciamo che ha una "*pulsazione*" elevata.

Il moto pulsante del punto P' può essere paragonato al moto di un "martello che picchia un chiodo". Il martellamento del chiodo può essere più o meno rapido e la "rapidità di martellamento" rende benissimo il concetto di *pulsazione*. Se il martello compie numerosi battiti (in un certo tempo) ha una pulsazione ("di martellamento") elevata. Un telaio che vibra rapidamente (quando è abbandonato alle sue libere oscillazioni) ha una *pulsazione* ω elevata; ω è, dunque, la *pulsazione* del moto vibratorio del telaio e viene detta *pulsazione naturale* del telaio o, più semplicemente: *pulsazione del telaio*. Un telaio ha una pulsazione elevata se vibra velocemente quando viene abbandonato alle sue oscillazioni. Un telaio che vibra "lentamente" ha una pulsazione bassa.

Il periodo di vibrazione del telaio è inversamente proporzionale alla pulsazione ω (essendo $T = 2\pi/\omega$) e un telaio che ha una pulsazione elevata, ha un periodo di vibrazione breve; un telaio che ha una pulsazione bassa, ha, invece, un periodo di vibrazione lungo.

Il periodo di vibrazione di un telaio dipende dalla sua pulsazione ω e ω dipende dalla rigidità e dalla massa del telaio. Sono questi i 2 parametri fisici che decidono la velocità di vibrazione (naturale) di un telaio. Un telaio rigido e leggero vibra rapidamente. Un telaio flessibile e pesante vibra, invece, lentamente. Queste affermazioni sono intuitive e possiamo verificarle, modificando m , a parità di k , o modificando k , a parità di m .

Esempio

Se la massa m del nostro telaio è di 20t, (anziché 30), la pulsazione vale 26 rad/s e il periodo vale 0,24 secondi, (anziché 0,3 s); il telaio è più leggero e vibra più rapidamente. Se il nostro telaio ha pilastri 25x25 e mantiene la massa di 30t, risulta: $k = 80\text{kN/cm}$; $\omega = 16\text{rad/s}$; $T = 0,39\text{ s}$, (anziché 0,3 s). Il telaio è più flessibile e vibra più lentamente.

1.3 Coefficiente di amplificazione dinamica

In questo paragrafo analizziamo il comportamento del telaio elementare dei paragrafi precedenti, quando viene sottoposto a una forza orizzontale esterna $F_E = F \cos(\omega_F t)$: figura 1.7. La forza F_E è chiamata *forzante* e la sua intensità varia nel tempo in modo sinusoidale.

All'istante $t = 0$ risulta $F_E = F \cdot 1 = F$. Il termine F è, dunque, il valore della forzante all'istante iniziale ed è anche il suo valore massimo: la funzione coseno vale al massimo 1 e l'intensità della forzante diminuisce negli istanti successivi. La forzante diventa nulla, per un istante, quando il coseno si annulla e F_E risulta negativa, negli istanti successivi: la forzante spinge la trave verso sinistra. La variazione temporale della forzante è regolata dalla funzione coseno; la forzante varia, dunque, in modo "armonico" e ω_F è la *pulsazione* di questa variazione.

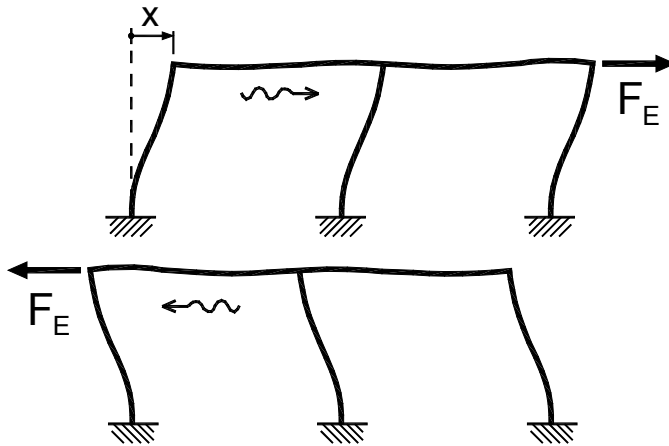


Figura 1.7 Telaio elementare sollecitato da una forzante.

Esempio

Supponiamo che la forzante abbia una pulsazione $\omega_F = 10$ rad/s. Applicando la formula (1.5) $T = 2\pi/\omega_F$ troviamo un periodo di circa 0,6 secondi: la forzante spinge il telaio in modo alternato; spinge il telaio in direzione positiva per 3 decimi di secondo e spinge il telaio in direzione opposta nei 3 decimi di secondo successivi.

La forzante “scuote” il telaio in “modo armonico” e l’azione “pulsante” della forzante mette in movimento il telaio. Dopo un transitorio, che non interessa le applicazioni professionali e che, pertanto, tralasciamo, il telaio si mette ad oscillare di moto armonico con la stessa pulsazione della forzante. Lo spostamento della travata (all’istante generico) vale:

$$x = X \cos(\omega_F t)$$

essendo X lo spostamento massimo, che la travata raggiunge, nelle sue oscillazioni: la travata oscilla tra lo spostamento massimo X e lo spostamento massimo $-X$. Applicando il 2° principio della dinamica ($F = ma$) al moto della travata, risulta:

$$F_E - kx = m\ddot{x} \quad (1.6)$$

La trave è soggetta alla forzante e alla forza elastica di richiamo $-kx$.

Sostituendo le espressioni precedenti, risulta:

$$F \cos(\omega_F t) - k X \cos(\omega_F t) = m(-\omega_F^2 X \cos(\omega_F t))$$

La derivata seconda dello spostamento istantaneo è calcolata nel solito modo. Il termine $\cos(\omega_F t)$ si semplifica e rimane definita un'equazione lineare nell'incognita X . La soluzione dell'equazione è:

$$X = \frac{F}{k - \omega_F^2 m} = \frac{F}{k(1 - \omega_F^2 (m/k))} = \frac{F/k}{1 - \omega_F^2 / \omega^2}$$

L'equazione è stata risolta, tenendo conto che $k/m = \omega^2$; ω è la pulsazione naturale del telaio. Il rapporto F/k quantifica lo spostamento orizzontale della travata provocato dalla forza F ; F è il valore massimo della forzante e una forza di questo tipo provoca lo spostamento $x = F/k$. Stiamo parlando dello spostamento provocato da una forza F di intensità costante; parliamo, quindi, di uno spostamento statico e lo indichiamo con x_S .

$$X = \frac{x_S}{1 - (\omega_F / \omega)^2} \rightarrow \frac{X}{x_S} = \frac{1}{1 - (\omega_F / \omega)^2}$$

Il rapporto X/x_S è chiamato **coefficiente di amplificazione dinamica** degli spostamenti orizzontali della struttura e lo indichiamo con C_{ad} :

$$C_{ad} = \frac{1}{1 - (\omega_F / \omega)^2} \quad (1.7)$$

Esempio

Se $C_{ad} = 2$, significa che $X/x_S = 2$ e $X = 2x_S$: lo spostamento massimo che raggiunge la travata (nelle sue oscillazioni) è il doppio dello spostamento (statico) che provocherebbe il valore massimo della forzante.

Il coefficiente C_{ad} dipende da ω_F . La pulsazione naturale del telaio è nota e vale, in questo caso: $\omega = 21,6$ rad/s. La tabella 1.1 riporta alcuni valori della pulsazione della forzante e i corrispondenti valori di C_{ad} . I valori di ω_F sono espressi in rad/s e sono disposti in ordine crescente. Il 1° valore della tabella è $\omega_F = 0,5$ rad/s.

La forzante agisce in modo lentissimo e impiega una dozzina di secondi a completare il suo ciclo di spinta: $T = 2\pi/\omega_F = 12,6$ s. La forzante agisce in

modo quasi statico e il telaio si muove con la stessa lentezza. Il coefficiente C_{ad} vale $1/(1-0,5/21,6) = 1,02$. Gli spostamenti dinamici della travata superano del 2% gli spostamenti statici che sarebbero causati dall'azione statica della forza F .

Tabella 1.1 Valori del coefficiente di amplificazione dinamica.

ω_F	0.5	5	10	15	18	19
T	12.6	1.3	0.6	0.4	0.35	0.33
C_{ad}	1.02	1.06	1.27	1.93	3.3	4.4

Il 2° valore della tabella è $\omega_F = 5$ rad/s. La forzante impiega 1,3 secondi a compiere il suo ciclo di spinta e risulta $C_{ad} = 1,06$. Il 3° valore della tabella è $\omega_F = 10$ rad/s. La forzante impiega 6 decimi di secondo a completare il ciclo di spinta.

La forzante è abbastanza rapida e cambia verso ogni 3 decimi di secondo. Gli "sbandamenti" dinamici della travata superano del 27% lo spostamento statico che sarebbe provocato dal valore massimo della forzante. L'amplificazione dinamica cresce rapidamente con ω_F e i risultati sono visualizzati nella figura 1.8. Il diagramma si impenna quando la pulsazione della forzante si avvicina alla pulsazione naturale del telaio. Lo sbandamento dinamico della travata raggiunge valori (teoricamente) infiniti quando $\omega_F = \omega$. Il denominatore della formula (1.7) si annulla e il grafico presenta un asintoto verticale. La struttura ondeggia in modo incontenibile e si dice che la struttura "**va in risonanza**". La forzante agita il telaio con la pulsazione naturale della struttura. La forzante spinge la travata in direzione positiva quando la struttura oscilla in direzione positiva e quando la struttura comincia il tragitto di ritorno, la forzante diventa anch'essa negativa. La forzante agisce con la massima efficacia ed esalta la vibrazione naturale del telaio: lo sbandamento della travata aumenta, ad ogni oscillazione e distrugge la struttura.

La tabella 1.2 contiene i coefficienti C_{ad} , con $\omega_F > \omega$: la pulsazione della forzante è maggiore della pulsazione naturale del telaio.

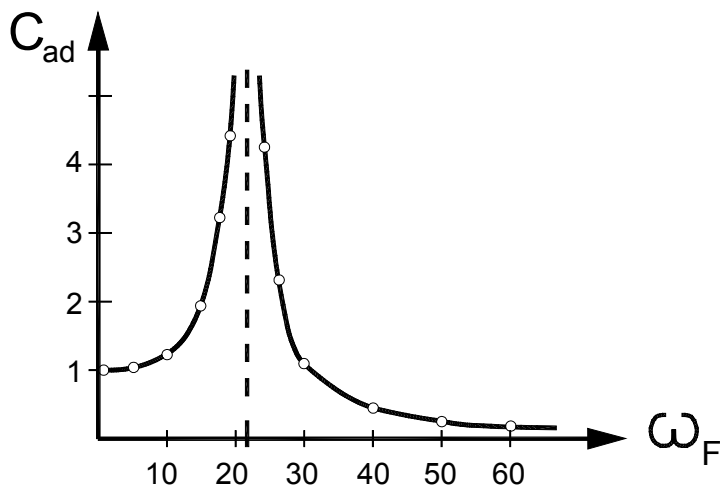


Figura 1.8 Diagramma del coefficiente di amplificazione dinamica.

Il coefficiente C_{ad} risulta, in questi casi, negativo, ma il segno meno è stato tralasciato. Gli spostamenti della travata hanno segno opposto a quelli della forzante e la trave raggiunge lo spostamento massimo positivo, quando la forzante raggiunge il valore massimo negativo. Questo fenomeno è intuitivo ed è causato dalla rapidità di variazione della forzante, ma interessa poco; a noi interessano i valori assoluti dello spostamento x e trascuriamo, quindi, il segno meno.

Tabella 1.2 Valori di C_{ad} (con $\omega_F > \omega$).

ω_F	24	26	30	40	50	60
T	0.26	0.24	0.21	0.16	0.13	0.10
C_{ad}	4.26	2.23	1.08	0.41	0.23	0.15

Il coefficiente C_{ad} presenta un andamento calante e tende a zero se ω_F assume valori elevati. La forzante cambia segno rapidamente e la sua azione risulta poco efficace. È come se il telaio non avesse il tempo di deformarsi; l'azione della forzante è molto rapida e l'oscillazione della travata risulta "disturbata". La struttura proseguirebbe in direzione positiva, ma

viene richiamata in direzione opposta, dalla forzante, che ha già cambiato segno, nel frattempo e questo fatto avviene di continuo. La struttura vibra con la stessa rapidità della forzante, ma gli spostamenti della travata risultano piccoli.

Esempio

Se $\omega_F = 60 \text{ rad/s}$ risulta $C_{ad} = 0,15$: la forzante impiega un decimo di secondo a completare il suo ciclo di spinta e cambia verso 20 volte in un secondo. Gli spostamenti massimi della travata sono il 15% degli spostamenti, che sarebbero causati dal valore massimo della forzante. Il diagramma tende asintoticamente a zero: la struttura vibra in modo rapidissimo, ma rimane quasi ferma. Riprenderemo questo fenomeno, analizzando lo spettro di risposta.

Il grafico di C_{ad} è stato ricavato trascurando le dissipazioni energetiche. Le dissipazioni modificano il calcolo di C_{ad} e il relativo diagramma. La figura 1.9 mostra un diagramma qualitativo di C_{ad} che tiene conto delle dissipazioni energetiche. La parte iniziale e la parte finale del grafico rimangono praticamente uguali a prima e cambia la zona centrale del diagramma. Il grafico presenta un valore massimo finito di C_{ad} . Si tratta ancora di un fenomeno di "risonanza", ma è una risonanza limitata.

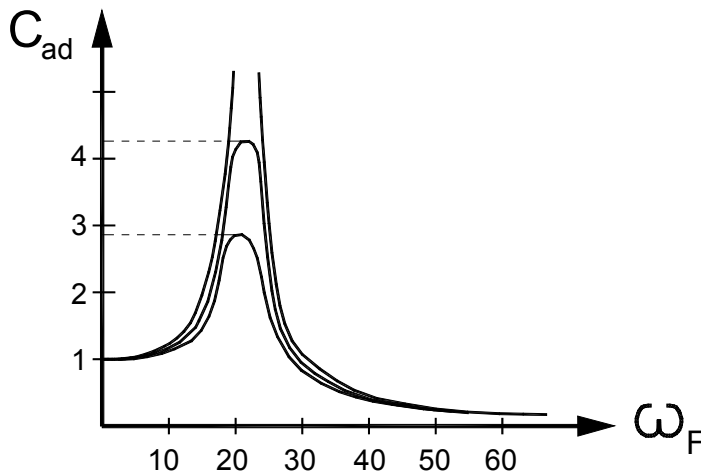


Figura 1.9 Effetti delle dissipazioni energetiche su C_{ad} .

Il valore massimo di C_{ad} dipende dall'entità delle dissipazioni energetiche e, aumentando l'entità del fenomeno dissipativo, si riduce il valore massimo di C_{ad} : la curva più bassa del diagramma prevede una maggiore dissipazione energetica della curva soprastante. Lo stato limite ultimo prevede grandi dissipazioni energetiche, dovute, soprattutto, a fenomeni di plasticizzazione di alcune parti della struttura. La norma introduce coefficienti riduttivi delle amplificazioni dinamiche degli spostamenti strutturali (causati dal sisma) negli spettri di risposta allo stato limite ultimo.

1.4 Spettri di risposta

Il coefficiente di amplificazione dinamica che abbiamo esaminato nel paragrafo 1.3 non ha un'applicazione diretta, ma ha un'importanza basilare, perché introduce il concetto di *risposta* dinamica di una struttura. Un telaio elementare sollecitato da una forzante armonica *risponde* a questa sollecitazione, manifestando oscillazioni più o meno ampie e ci possiamo chiedere se l'evento sismico agisce in questo modo, sul telaio.

L'evento sismico è estremamente complesso e imprevedibile, ma può essere schematizzato (in prima battuta e in modo estremamente grossolano) come un'oscillazione alternata del terreno. Il sisma imprime accelerazioni alternate alle fondazioni del telaio elementare, che abbiamo considerato nei paragrafi precedenti e la massa della travata "si oppone" alle accelerazioni che riceve dal terreno. È noto che un corpo di massa m si oppone all'accelerazione che subisce, manifestando una forza F , diretta in verso opposto a quello dell'accelerazione; l'intensità della forza F è data dal prodotto $m \cdot a$ essendo a l'accelerazione del corpo; stiamo, parlando, evidentemente, della **forza d'inerzia**. L'unità di misura delle forze si basa su questo concetto fisico e diciamo che la massa di 1 kg oppone la forza di 1 N, quando subisce l'accelerazione di 1 m/s^2 .

L'accelerazione sismica mette in movimento il telaio e la massa della travata "si oppone" a questo movimento. I pilastri "avvertono" la presenza della massa m (che grava sopra di loro) come una massa che rimarrebbe ferma e che "devono", invece, spostare, durante il terremoto: figura 1.10.

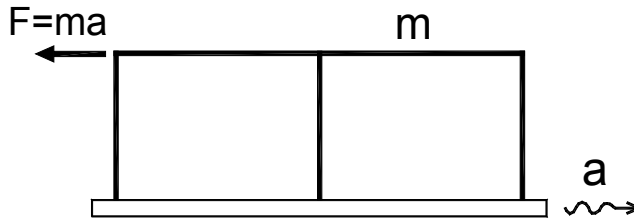


Figura 1.10 Telaio rigido sottoposto all'accelerazione a .

Se i pilastri fossero infinitamente rigidi, il telaio si muoverebbe senza la minima deformazione e i pilastri risulterebbero sollecitati (in ogni istante) dalla forza d'inerzia istantanea $F = m \cdot a$, applicata alla travata, essendo a l'accelerazione istantanea del terreno. La forza massima sarebbe data dal prodotto della massa m per l'accelerazione massima del terreno e il calcolo della forza sismica F (applicata alla travata) sarebbe già finito. La forza d'inerzia $m \cdot a$ ha segno opposto a quello dell'accelerazione del terreno e la struttura verrebbe calcolata applicando alla travata la forza $F = -m \cdot a$. L'accelerazione sismica agisce, però, nei due versi e la struttura verrebbe calcolata, in un secondo tempo, applicando la forza $F = m \cdot a$.

Questa conclusione vale anche per telai multipiano e se dovessimo calcolare le forze sismiche che sollecitano un telaio multipiano, infinitamente rigido, basterebbe applicare a ciascuna travata, una forza orizzontale uguale al prodotto della massa di ciascuna travata per l'accelerazione massima del terreno. I telai non sono, però, infinitamente rigidi e presentano una certa flessibilità. La travata del nostro telaio elementare manifesta, durante il terremoto, uno spostamento orizzontale (istantaneo) x , rispetto alle fondazioni e subisce, quindi, un'accelerazione aggiuntiva \ddot{x} .

Applicando il 2° principio della dinamica al moto della trave, risulta:

$$-Kx = m(a + \ddot{x}) \quad (1.8)$$

Al 1° membro figura la forza di richiamo esercitata dai pilastri deformati: questa forza esiste sempre se x è diverso da zero e non esistono altre forze esterne. Sviluppando i prodotti e portando il prodotto $m \cdot a$ al 1° membro, risulta:

$$-m \cdot a - Kx = m \ddot{x} \quad (1.9)$$

Il termine $-m \cdot a$ è la forza d'inerzia esercitata dalla massa m sul telaio (e questa forza è, giustamente, negativa, se $a > 0$). Questa forza può essere interpretata come una forza esterna F_E (applicata alla travata) e l'equazione diventa:

$$F_E - kx = m \ddot{x}$$

Ma questa è l'equazione del telaio elementare sottoposto a forzante: equazione (1.6). Se l'accelerazione sismica varia in modo *armonico*, il telaio si comporta come se fosse sottoposto a una forzante armonica applicata alla travata. Il terremoto agisce, dunque, come una forzante esterna e valgono le conclusioni che abbiamo già trovato. La forzante sismica provoca spostamenti orizzontali (della travata) che dipendono dalla *pulsazione* dell'accelerazione sismica. La pulsazione dell'accelerazione sismica può essere molto più alta della pulsazione naturale del telaio e, in questo caso, gli spostamenti della travata sono relativamente piccoli. La pulsazione dell'accelerazione sismica può avvicinarsi, però, alla pulsazione di vibrazione naturale del telaio e avremo, in questo caso, le amplificazioni massime degli spostamenti strutturali. Stiamo parlando, però, di una schematizzazione molto *grossolana* della "scossa" di progetto.

Il problema è complesso e intervengono considerazioni di tipo statistico sulle caratteristiche delle onde sismiche che si possono prevedere in una determinata località. Il problema viene tecnicamente risolto utilizzando il diagramma della normativa chiamato *spettro di risposta delle accelerazioni*.

L'azione sismica è schematizzata da una forza orizzontale $F = mS$, applicata alla travata: figura 1.11; m è la massa della travata e S è l'accelerazione che si ricava dallo spettro di risposta: figura 1.12.

Lo spettro di risposta ha come ascisse, i periodi di vibrazione delle strutture e come ordinate le accelerazioni S . L'accelerazione spettrale di un telaio elementare è l'ordinata del diagramma che corrisponde al periodo di vibrazione naturale del telaio. La costruzione dello spettro è descritta nella norma e sarà esaminata più avanti, ma possiamo evidenziare, fin d'ora, le sue caratteristiche principali.

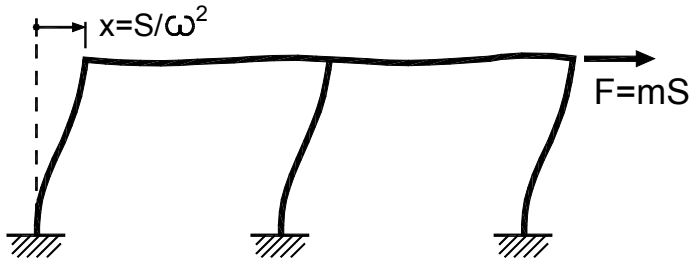


Figura 1.11 Forza sismica e spostamento della travata.

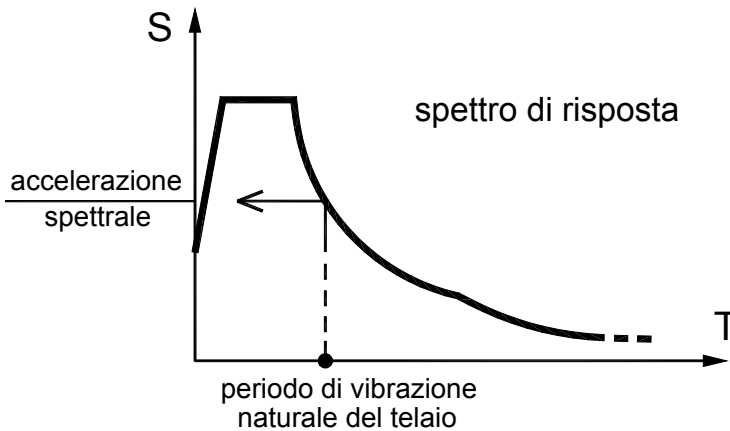


Figura 1.12 Spettro di risposta delle accelerazioni.

L'ordinata iniziale si riferisce a una struttura infinitamente rigida; una struttura "molto" rigida ha un periodo di vibrazione brevissimo e una struttura "infinitamente" rigida ha un periodo di vibrazione nullo: se la rigidità k tende a valori "infiniti", la pulsazione naturale del telaio diventa grandissima e il periodo $T = 2\pi/\omega$ tende a zero. La struttura è rigidissima e non manifesta oscillazioni dinamiche: l'ordinata iniziale del diagramma diventa il punto di partenza e di riferimento delle amplificazioni dinamiche legate alla flessibilità della struttura. Una struttura molto flessibile ha un periodo di vibrazione lungo e risente poco delle accelerazioni sismiche: le accelerazioni sismiche sono "rapide" e l'accelerazione spettrale tende a zero se il periodo di vibrazione della struttura è molto alto.

Il diagramma dello spettro presenta una zona di massima amplificazione per le strutture che hanno flessibilità intermedie e hanno periodi di vibrazione naturale paragonabili ai periodi di vibrazione delle onde sismiche.

Esempio

Il telaio elementare che abbiamo considerato finora ha un periodo $T = 0,3$ s e supponiamo di aver ricavato, dallo spettro di risposta, l'accelerazione $S = 3 \text{ m/s}^2$.

La forza sismica da applicare alla travata vale:

$$F = m S = 30 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s}^2 = 90 \text{ kN}$$

Questa forza provoca lo spostamento orizzontale $x = F/k$:

$$x = 90 \text{ kN} / (140 \text{ kN/cm}) = 0,64 \text{ cm}$$

La norma precisa che lo spostamento x si può ricavare dallo *spettro di risposta degli spostamenti* e questo spettro si ricava da quello delle accelerazioni, dividendo le ordinate dello spettro delle accelerazioni per ω^2 . Applicando questa indicazione, lo spostamento x della travata vale:

$$x = S / \omega^2 \quad (1.10)$$

La norma indica la formula (1.10) in questo modo: $x = S(T/2\pi)^2$, ma si tratta della stessa formula (essendo $T = 2\pi/\omega$).

La formula (1.10) deriva da queste relazioni:

$$x = F / k = m S / k = S / (k/m) = S / \omega^2$$

Applicando la relazione $x = S/\omega^2$, ritroviamo lo spostamento di prima:

$$x = 3 \text{ (m/s}^2\text{)} / (467 \text{ rad}^2/\text{s}^2\text{)} = 0,0064 \text{ m} = 0,64 \text{ cm}$$

Gli spostamenti calcolati con la formula (1.10) permettono di calcolare le forze sismiche da applicare alla struttura, con la relazione $F = kx$ e il calcolo dinamico viene ricondotto a un calcolo "statico". La struttura può manifestare però spostamenti (istantanei) maggiori e la norma fissa dei coefficienti maggiorativi che permettono di stimare gli spostamenti massimi della struttura. La vecchia normativa usava i coefficienti maggiorativi 4 (per l'analisi dinamica) e 6 (per l'analisi statica). I coefficienti maggiorativi degli spostamenti strutturali sono usati, per esempio, nella verifica dei

giunti sismici: la distanza fra due strutture contigue deve evitare il martellamento reciproco delle strutture stesse. I particolari di queste formule sono riportati nella normativa.

1.5 Calcolo dell'accelerazione sismica con Excel

Lo spettro delle accelerazioni può essere impostato in un foglio elettronico e l'esempio è contenuto nel file intitolato **spettro**. Il Lettore è invitato a rileggere la parte della normativa che riguarda questo tema e la terminologia di questo paragrafo è ulteriormente descritta nella norma. Il foglio permette di calcolare l'accelerazione spettrale di progetto $S_d(T)$. Il pedice d è l'iniziale della parola inglese *design* e questo pedice è usato per indicare i valori "di progetto". L'accelerazione spettrale di progetto S_d è funzione del periodo T e abbiamo, scritto: $S_d(T)$. Una cella del foglio è riservata al periodo T e digitando il valore del periodo, si ottiene subito l'accelerazione spettrale $S_d(T)$.

Le celle del foglio di colore rosso contengono i dati di ingresso e possono essere modificate. Le altre celle sono *protette* da errori di sovrascrittura. I comandi di protezione e altri comandi del foglio elettronico (come il comando del SE logico) sono descritti nell'ultimo capitolo. Una cella è riservata alla *vita nominale* V_N dell'edificio e una cella è riservata al *coefficiente d'uso* C_U . L'esempio del foglio riguarda un edificio residenziale con alcuni piani. L'esempio considera una vita nominale di almeno 50 anni e $C_U = 1$. Una cella calcola il *periodo di riferimento* $V_R = V_N C_U$ e risulta $V_R = 50$ anni.

L'accelerazione massima del terreno è indicata, nella norma, con a_g . Il valore di a_g si riferisce a un suolo rigido e orizzontale: il terreno non ha, solitamente, queste caratteristiche e ritorneremo su questo aspetto. L'accelerazione a_g dipende dalle coordinate geografiche dell'edificio e l'esempio prosegue considerando i seguenti valori di *longitudine* e *latitudine*: 10,608; 44,700. (Le coordinate di una località si possono ricavare via internet). L'accelerazione a_g è consultabile nel sito internet del *Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici* (alla voce: spettri di risposta). La tabella 1.3 si

riferisce al nostro esempio; l'accelerazione a_g è espressa come percentuale di g (accelerazione di gravità).

Tabella 1.3 Tempi di ritorno e parametri sismici di una località.

T_R	30	50	72	101	140	201	475	975	2475
a_g	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.11	0.16	0.20	0.26
F_0	2.47	2.50	2.48	2.48	2.46	2.44	2.36	2.38	2.49
T^*_C	0.25	0.26	0.27	0.27	0.28	0.28	0.29	0.31	0.32

La prima riga della tabella contiene i **tempi di ritorno** T_R (espressi in anni). Il tempo di ritorno è un concetto di statistica e si basa su questo presupposto: i terremoti di piccola intensità sono più frequenti dei terremoti di grande intensità. I terremoti violenti sono rari e bisogna ipotizzare un numero elevato di anni per ritenere che un terremoto violento si manifesti nel periodo considerato. Un terremoto che ha tempo di ritorno di 100 anni si manifesta, mediamente, almeno una volta, in un periodo di 100 anni. Si tratta, ovviamente, di una valutazione *probabilistica*. Considerando un numero maggiore di anni, aumenta l'intensità del terremoto che si può verificare nella località considerata. La tabella mostra chiaramente che a_g aumenta con T_R . Il tempo di ritorno è calcolato con la formula:

$$T_R = -V_R / \ln(1 - P_{VR})$$

Al denominatore figura il logaritmo naturale della quantità $(1 - P_{VR})$ e P_{VR} è la probabilità che il terremoto di progetto si manifesti nel periodo di riferimento considerato.

Esempio

Il terremoto “*di progetto*” utilizzato nella verifica della struttura allo *stato limite ultimo di salvaguardia della vita* provoca determinate conseguenze sull'edificio (descritte nella normativa) e la norma attribuisce a questo evento un 10% di probabilità di manifestarsi nel periodo V_R . Assumendo $P_{VR} = 10\% = 0,1$ risulta:

$$T_R = -50 / \ln(1 - 0,1) = 475 \text{ (anni)}$$

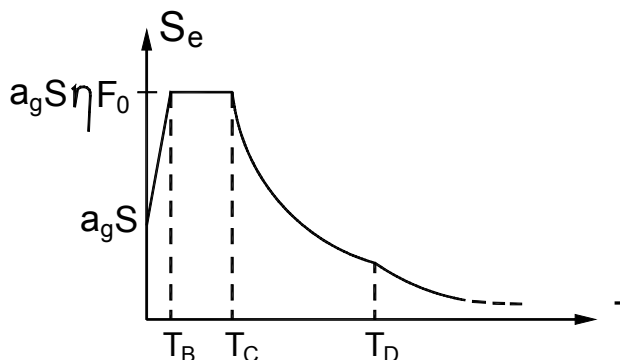


Figura 1.13 Spettro di risposta in campo elastico.

Il terremoto di progetto ha il 10% di probabilità di manifestarsi nel periodo $V_R = 50$ anni e si manifesta (in media) almeno una volta, nel periodo $T_R = 475$ anni.

Lo spettro di risposta in campo *elastico* è indicato con S_e e inizia dall'ordinata $a_g S$: figura 1.13. Il termine S è, in questo caso, il coefficiente di amplificazione dovuto al sottosuolo e questo simbolo non va confuso con quello dell'accelerazione spettrale generica S . Le caratteristiche del suolo e il contesto topografico possono amplificare l'accelerazione sismica e tutte le ordinate dello spettro risultano moltiplicate per il coefficiente S .

Il grafico presenta un tratto orizzontale, di massima amplificazione: F_0 è il coefficiente di massima amplificazione e l'ordinata massima del grafico vale $a_g S F_0 \eta$. Il fattore η è legato allo smorzamento delle oscillazioni strutturali causato dalle dissipazioni energetiche. Le espressioni dei tratti curvilinei sono descritte nella normativa: il primo tratto è inversamente proporzionale a T e l'ultimo tratto è inversamente proporzionale a T^2 .

Allo stato limite ultimo, il fattore η è sostituito dall'espressione $1/q$ essendo q il *fattore di struttura*: figura 1.14. Il fattore q è maggiore di 1 e il tratto iniziale dello spettro diventa decrescente. Il fattore q vale $K_R q_0$ e si adotta $K_R = 1$, se la struttura è regolare in altezza; K_R vale, altrimenti, 0,8. Il termine q_0 è stato calcolato con la formula della normativa: $q_0 = 3\alpha_0/\alpha_1$. La formula si riferisce a telai spaziali a bassa duttilità: i telai che hanno travi in spessore sono considerati a bassa duttilità. Il rapporto α_0/α_1 vale 1,3 per telai a più piani e più campate.

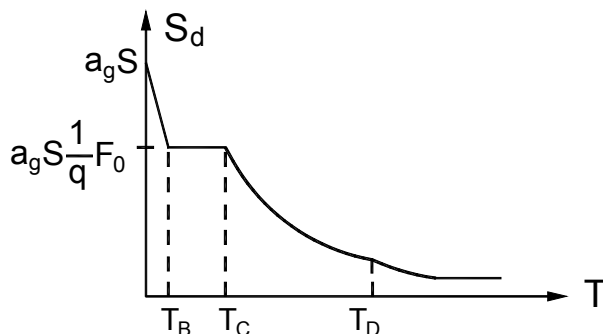


Figura 1.14 Spettro di risposta allo stato limite ultimo.

Esempio

L'esempio tipico di un edificio regolare in altezza prevede: $q = 1,3 \cdot 1,3$
 $q = 3,9$; $\eta = 0,26$. Il valore del fattore η è stato digitato nell'apposita cella;
 se l'edificio è irregolare in altezza si digita $\eta = 0,32$.

La formula di S_s è riportata nella normativa. S_T è ricavato dalla tabella della norma; la tabella è molto schematica e questo fatto ribadisce che il calcolo è, per molti versi, *convenzionale*.

Indicando $a_g S \eta F_0$ con la lettera A, risulta: $A = 0,14$ g. È questa l'ordinata del tratto orizzontale dello spettro. È, inoltre: $T_B = T_C/3$; $T_C = C_C T^* C$; $C_C = 1,05(T^* C)^{-0,33}$; $T_D = 4a_g/g + 1,6$. Risulta: $C_C = 1,58$; $T_C = 0,46$ s; $T_B = 0,15$ s; $T_D = 2,22$ s. Una cella è riservata al periodo T e l'ultima cella calcola $S_d(T)$:

$$S_d = SE (T < T_B; A (T/T_B + (1 - T/T_B) / (\eta F_0));$$

$$SE (T < T_C; A; SE (T < T_D; A T_C/T; A T_C T_D/T^2)))$$

Il foglio si riferisce a suoli di categoria C. Il coefficiente $S = S_s S_T$ tiene conto del sottosuolo e dell'altimetria. Modificando S_s si ottengono i fogli di Excel per altre categorie di sottosuolo. Lo schema della formula S_s è:

$$S_s = SE((1,7 - 0,6F_0 a_g/g) < 1; 1; SE((1,7 - 0,6F_0 a_g/g) < 1,5; 1,7 - 0,6F_0 a_g/g; 1,5))$$

S_d è calcolata come percentuale di g. La formula lineare è usata fino a T_B . Se $T_B < T < T_C$ risulta $S_d = A$ e la formula prosegue in modo analogo. L'ordinata iniziale vale 0,23g. Deve essere, infine, $S_d > 0,2a_g$. Il valore minimo del nostro esempio è: $S_d = 0,03$ g.

