ALGEBRA LINEARE

Prodotto matriciale (PROMA)

Poiché l'uso delle matrici non è ancora molto diffuso, si ritiene opportuno richiamare alcune proprietà fondamentali e alcune operazioni con le matrici.

a) *Definizioni.* Una *matrice* è un gruppo di numeri o simboli disposti in forma di tabella. I seguenti sono esempi di matrici.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad [4 \quad 7 \quad 1] \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Ogni matrice ha un preciso numero di righe e di colonne. Se le righe sono m e le colonne sono n, queste sono le *dimensioni* della matrice, indicate anche con $m \times n$. Gli elementi della matrice **A** vengono indicati con a_{ik}, dove i è l'indice di riga ($i = 1, 2, ..., m$) e k è l'indice di colonna ($k = 1, 2, ..., n$). Se c'è solo una colonna si parla di *vettore colonna* e lo si indica con una lettera minuscola in carattere marcato, per esempio **x**. Se invece c'è solo una riga si parla di *vettore riga* e lo si indica con un vettore colonna. Spesso per chiarezza si distingue tra vettore colonna e vettore riga. Quest'ultimo viene allora indicato col soprassegno T, per esempio $\mathbf{x}^T$, che sta per "*trasposto*", cioè riga al posto di colonna.

b) *Tipi di matrici.* Si dice *matrice quadrata* una matrice in cui il numero di righe è uguale al numero di colonne. La *diagonale principale* è formata dagli elementi a_{ik} che hanno $i = k$. Una *matrice diagonale* è quella in cui sono diversi da zero solo gli elementi della diagonale principale. La *matrice identità* è una matrice diagonale con gli elementi della diagonale tutti uguali a 1, si indica con **I**, per esempio

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matrice è *triangolare superiore* se sono uguali a zero tutti gli elementi sotto alla diagonale principale. Se invece sono uguali a zero tutti gli elementi sopra la diagonale principale, allora si dice *tiriangolare inferiore*. Per esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

c) *Uguaglianza di matrici*. Due matrici **A** e **B** si dicono *uguali* se hanno lo stesso numero di righe e di colonne (sono delle stesse dimensioni) e hanno tutti gli elementi ordinatamente uguali. Valgono le proprietà

–*Commutativa*: se **A** = **B**, allora **B** = **A**

–*Transitiva*: se **A** = **B** e **B** = **C**, allora **A** = **C**.

d) *Somma di matrici*. La somma di due matrici **A** e **B**, delle stesse dimensioni, è una matrice **C** che ha le stesse dimensioni e i cui elementi sono la somma dei corrispondenti elementi di **A** e **B**. Cioè $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$. Valgono le seguenti proprietà

$$r\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\,\mathbf{A} + r\,\mathbf{B}$$
$$(r + s)\mathbf{A} = r\mathbf{A} + s\mathbf{A}$$
$$r\,(\mathbf{AB}) = (r\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(r\mathbf{B})$$
$$r\,(s\mathbf{A}) = (rs)\,\mathbf{A}$$

f) *Moltiplicazioni tra matrici* (o prodotto matricale). Per poter moltiplicare due matrici occorre che il numero di colonne della prima sia uguale al numero di righe della seconda. Date due matrici **A** ($m \times l$) e **B** ($l \times n$) il loro prodotto è una matrice **C** ($m \times n$) i cui elementi c_{ik} sono dati dalla somma dei prodotti degli elementi della riga i-esima di **A** per quelli della colonna k-esima di **B**. In simboli $c_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + \ldots\ldots + a_{il}\, b_{lk}$. *Il prodotto non è commutativo* (se non in casi particolari), per esempio, date le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si ottiene}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{, mentre} \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il *prodotto intero* (o scalare) tra due vettori **a** e **b**, che è indicato con **a•b** nella teoria degli spazi vettoriali, può essere indicato in forma matriciale con $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$, per esempio

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$$

Il prodotto matriciale si distingue dal prodotto tra due scalari perchè due matrici entrambe non nulle possono dare, moltiplicandole, la matrice nulla. Per esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà

–*Invarianza*: **AI** = **IA** = **A** (**I** è la matrice identità)

–*Associatività*: **A** (**BC**) = (**AB**) **C** = **ABC**

–*Distributività*: **A** (**B** + **C**) = **AB** + **AC** e (**A** + **B**)**C** = **AC** + **BC**

Per matrici di dimensioni oltre 3x3 eseguire il prodotto matricale può essere laborioso. Si riporta pertanto il programma PROMA che lo esegue.

g) *La matrice trasposta.* Data una matrice **A** di dimensioni $m \times n$ la sua trasposta è la matrice che si ottiene scambiando le righe con le colonne, si indica con $\mathbf{A}^T$ ed è di dimensioni $n \times m$. Se $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$, i suoi elementi sono $b_{ik} = a_{ki}$. Per esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Valgono le seguenti proprietà

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

$$(r\mathbf{A})^T = r\mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

h) *Matrici simmetriche* . Una matrice *quadrata* è simmetrica rispetto alla diagonale principale se è uguale alla sua trasposta, in simboli $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Poichè la trasposizione di una matrice quadrata non cambia gli elementi della diagonale principale, gli elementi sopra la diagonale principale devono essere l'immagine speculare di quelli sotto la diagonale, cioè $a_{ik} = a_{ki}$. Per esempio è simmetrica la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Le matrici simmetriche sono frequenti nel calcolo delle strutture perchè, per esempio, la rotazione del nodo i dovuta al momento flettente unitario applicato nel nodo k è uguale alla rotazione in k causata da un momento unitario applicato in i. Anche nella compensazione delle misure sono presenti sempre matrici simmetriche. Infatti compaiono prodotti del tipo $\mathbf{A}^T\,\mathbf{A}$ oppure $\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{A}$ con $\mathbf{B}$ simmetrica e il risultato, in entrambi i casi, è una matrice simmetrica. Con la simmetria si semplificano i calcoli e si riduce l'occupazione di memoria del calcolatore.

i) *Lista delle istruzioni e caso-prova.*

```
1010 REM ==== PROMA ========== 1.1 ====
1020 REM   P R O D O T T O   M A T R.
1030 REM === DIMENSIONAMENTI E FUNZIONI
1040 DIM A(15,15),B(15,15),C(15,15)
1050 DEF FNI(X) = INT (X*1000+.5)/1000
1060 REM ============= INSERIMENTO DATI
1062 PRINT "PRODOTTO MATRICIALE "
1063 PRINT
1064 PRINT "D A T I "
1070 PRINT " N.RO RIGHE E COL. DI [A] ";
1080 INPUT M,L
1090 PRINT " DARE LE RIGHE DI [A] "
1100 FOR I=1 TO M
1110   PRINT "................. "
1120   FOR J=1 TO L
1130     PRINT "  A ";I;J;
1140     INPUT A(I,J)
1150   NEXT J
1160 NEXT I
1170 PRINT " N.RO COLONNE DI [B] ";
1180 INPUT N
1190 PRINT " DARE LE RIGHE DI [B] "
1200 FOR I=1 TO L
1210   PRINT "................. "
1220   FOR J=1 TO N
1230     PRINT "  B ";I;J;
1240     INPUT B(I,J)
1250   NEXT J
1260 NEXT I
1270 REM === CALCOLO CON SOTTOPROGRAMMA
1280 GOSUB 2000
1290 REM ============= STAMPA RISULTATI
1292 PRINT
1293 PRINT "R I S U L T A T I "
1300 PRINT " MATRICE PRODOTTO "
1310 FOR I=1 TO M
1320   FOR J=1 TO N
1330     JC=10*J-7
1340     PRINT FNI(C(I,J));
1350   NEXT J
1360   PRINT
1370 NEXT I
1380 END
2000 REM = P R O D.  R I G A  X  C O L.
2010 FOR I=1 TO M
2020   FOR J=1 TO N
2030     S=0
2040     FOR K=1 TO L
2050       S=S+A(I,K)*B(K,J)
2060     NEXT K
2070     C(I,J)=S
2080   NEXT J
2090 NEXT I
2100 RETURN
```

```
RUN
PRODOTTO MATRICIALE

D A T I
 N.RO RIGHE E COL. DI [A] ?   3, 2
 DARE LE RIGHE DI [A]
.................
  A  1  1 ?   1
  A  1  2 ?   2
.................
  A  2  1 ?   0
  A  2  2 ?   1
.................
  A  3  1 ?   1
  A  3  2 ?   0
 N.RO COLONNE DI [B] ?   3
 DARE LE RIGHE DI [B]
.................
  B  1  1 ?   1
  B  1  2 ?   1
  B  1  3 ?   0
.................
  B  2  1 ?   2
  B  2  2 ?   0
  B  2  3 ?   1

R I S U L T A T I
 MATRICE PRODOTTO
 5     1     2
 2     0     1
 1     1     0
Ok
```